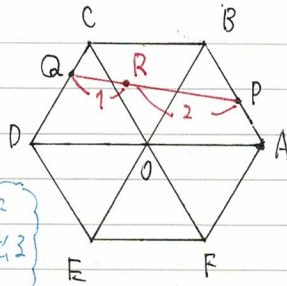


2017年 東大文系数学 第2問

$0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$  とし.

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OA} + s\vec{AB} \\ &= \vec{OA} + s(\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= (1-s)\vec{OA} + s\vec{OB} \end{aligned}$$



基底の1つ外れを、どの2本にするか結果がキレイに出るか、わからずとも一旦  $\vec{OA}$  と  $\vec{OB}$  にしておく

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \vec{OD} + t\vec{DC} \\ &= -\vec{OA} + t\vec{OB} \end{aligned} \quad \vec{DC} = \vec{OB}$$

$$\vec{OR} = \frac{1}{3}\vec{OP} + \frac{2}{3}\vec{OQ}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ (1-s)\vec{OA} + s\vec{OB} \right\} + \frac{2}{3} \left\{ -\vec{OA} + t\vec{OB} \right\}$$

$$= -\frac{1}{3}\vec{OA} + s \left( -\frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} \right) + t \cdot \frac{2}{3}\vec{OB}$$

$-\frac{1}{3}\vec{OA}$  の点を  $-\frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}$  の方向と、 $\frac{2}{3}\vec{OB}$  の方向

移動する外れ

$$-\frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} = \frac{1}{3}(\vec{OB} - \vec{OA})$$

$$= \frac{1}{3}\vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{OC} \quad \text{なので}$$

$$\vec{OR} = -\frac{1}{3}\vec{OA} + s \cdot \frac{1}{3}\vec{OC} + t \cdot \frac{2}{3}\vec{OB}$$

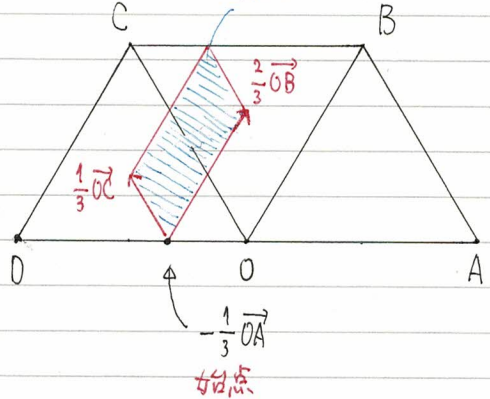
$\vec{OA}$  と  $\vec{OB}$  を基底にしておくが、 $\vec{OC}$  と  $\vec{OB}$  ( $\frac{1}{3}\vec{OC}$  と  $\frac{1}{3}\vec{OB}$ ) を基底にしておく方がわかりやすいことは気付いた

よって、 $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$  から

R は、 $-\frac{1}{3}\vec{OA}$  の位置を頂点とし、

$\frac{1}{3}\vec{OC}$  と  $\frac{2}{3}\vec{OB}$  で作られた平行四辺形の内部にある。

R は、この領域内を動く。



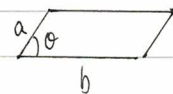
$\vec{OC}$  と  $\vec{OB}$  のなす角は  $60^\circ$  なので、求めた面積は、

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$\left(\frac{1}{3}\vec{OC}\right) \left(\frac{2}{3}\vec{OB}\right)$

補

平行四辺形の面積は



$$a \times b \times \sin \theta$$

で求められる。